

Concursul de Matematică
„Nicanor Moroșan” - Pîrteștii de Jos
Ediția a XVI-a
06.04.2024

Clasa a VIII – a
Barem de corectare și notare

1. Fie expresia:

$$E(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{x^2-4} \right) : \frac{x}{x^2+x-2}, \text{ unde } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1; 2\}.$$

- a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă. **(3 puncte)**
 b) Determinați numerele întregi n pentru care expresia E(n) este număr întreg. **(4 puncte)**

Barem:

a) $E(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{(x+2)(x-2)} \right) \cdot \frac{x^2+x-2}{x} \dots\dots\dots 1p$

$$E(x) = \frac{x}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x} \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare: $E(x) = \frac{x-1}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1; 2\} \dots\dots\dots 1p$

b) $E(n) = \frac{n-1}{n-2} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 1, 2\} \dots\dots\dots 1p$

$$(n-2)|(n-1) \text{ și } (n-2)|(n-2) \Rightarrow (n-2)|(n-1-n+2) \Rightarrow (n-2)|1, n-2 \in D_1 = \{-1, 1\} \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare: $n \in \{1, 3\} \dots\dots\dots 1p$

Dar $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2; 0; 1; 2\} \Rightarrow n = 3 \dots\dots\dots 1p$

2. Știind că $x^2 + 4y^2 + 6x - 4y + 10 = 0$ arătați că $\frac{y+x}{5} \cdot \frac{2}{x-12y}$ este pătratul unui număr rațional. **(7 puncte)**

Barem:

$$x^2 + 6x + 9 + 4y^2 - 4y + 1 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$(x+3)^2 + (2y-1)^2 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{matrix} (x+3)^2 \geq 0 \\ (2y-1)^2 \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x+3)^2 = (2y-1)^2 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$x = -3 \text{ și } y = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\frac{1}{2} + (-3)}{5} \cdot \frac{2}{-3 - 12 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare $\dots\dots\dots 1p$

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, secțiunea diagonală este un triunghi echilateral cu aria egală cu $64\sqrt{3}cm^2$. Calculați:

- a) Distanța de la punctul O la muchia VC, unde punctul O este centrul bazei. **(3 puncte)**
 b) Sinusul unghiului diedru format de fețele (ABC) și (VBC). **(4 puncte)**

Barem:

- a) Realizare figură1p
 $A_{\Delta VOC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta VAC}$ 1p
 $d(O, VC) = 4\sqrt{3}cm$1p
 b) Identificarea unghiului1p
 $a_p = 4\sqrt{14}cm$1p
 $VO = 8\sqrt{3}cm$ 1p
 $\sin(\widehat{(ABC), (VBC)}) = \frac{\sqrt{42}}{7}$ 1p

4. Prisma regulată dreaptă $ABCDEF$ are latura bazei $AB = 6 cm$ și diagonala $DB = 12 cm$, iar M este mijlocul muchiei CF. Calculați:

- a) Distanța de la M la diagonala DB; **(3 puncte)**
 b) Măsura unghiului diedru determinat de planele (DMB) și (ABC). **(4 puncte)**

Barem:

- a) Muchia laterală $AD = 6\sqrt{3}cm$1p
 $MB = MD = 3\sqrt{7}cm$ 1p
 Finalizare $d(M, DB) = 3\sqrt{3}cm$1p
 b) Identificarea muchiei diedrului.....1p
 Justificarea perpendicularităților
 DB și AB pe muchia diedrului.....2p
 Finalizare măsura unghiului diedru = 60° 1p.
Notă. Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.