

**OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA**  
**ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA, 23.02.2024**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**CLASA a VIII-a**

1. Se consideră  $E(x) = (x + 1)^2 - (x + 3)(x - 1) + (x + 3)^2 - 4, x \in R.$

a) (3p) Arătați că  $E(x)$  este pătrat perfect.

b) (4p) Determinați suma  $S$  a valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $E(x) = 1$

Soluție:

a)  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3, (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.....(1p)$

$E(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 3 + x^2 + 6x + 9 - 4.....(1p)$

$E(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$  pătrat perfect.....(1p)

b)  $E(x) = 1 \rightarrow (x + 3)^2 = 1.....(1p)$

$x + 3 = 1, x = -2.....(1p)$

$x + 3 = -1, x = -4.....(1p)$

$S = (-2) + (-4) = -6 .....(1p)$

2. Se consideră numerele reale  $a = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{7}}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7-\sqrt{2}}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$  și  $b = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)$

a) (3p) Arătați că  $a = \sqrt{2}$

b) (4p) Calculați media geometrică a numerelor  $a$  și  $b$ .

Soluție:

a)  $a = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{7}}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7-\sqrt{2}}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}.....(1p)$

$a = \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.....(1p)$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.....(1p)$

b)  $b = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - 4 + 3.....(1p)$

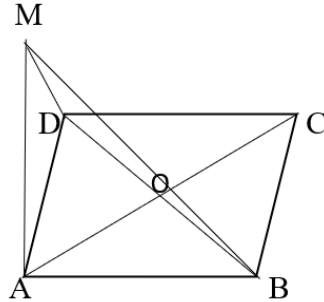
$b = \sqrt{2} + 1 - 4 + 3.....(1p)$

$b = \sqrt{2}.....(1p)$

$m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}.....(1p)$

3. Fie pătratul ABCD cu lungimea diagonalei egală cu  $4\sqrt{2}$  cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul pătratului cu  $AM = 4$  cm. Determinați:

- a) (4p) Determinați distanța de la B la planul (MAC).
- b) (3p) Determinați măsura unghiului dintre dreptele DB și MB.



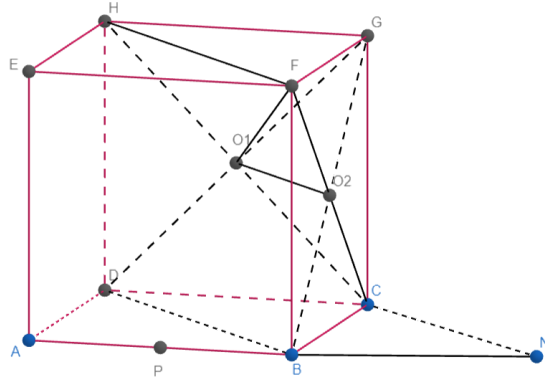
Soluție:

- a) desen corect .....1p
- $BO \perp AC, BO \perp MA$ .....1p
- $AC, MA \subset (MAC) \Rightarrow BO \perp (MAC)$ .....1p
- $d(B, (MAC)) = BO = 2\sqrt{2}cm$ .....1p
- b)  $\Delta MAD: MD = 4\sqrt{2} cm, \Delta MAB: MB = 4\sqrt{2} cm$ .....1p
- $\Delta MDB: MD = MB = DB = 4\sqrt{2} \Rightarrow$  *triunghiul MBD este echilateral*.....1p
- $\sphericalangle(MB, BD) = \sphericalangle MBD = 60^0$ .....1p

4. ABCDEFGH este un cub cu muchia  $AB = a$ , iar  $O_1$  este centrul feței CDHG.

- a) (3p) Aflați măsura unghiului  $CO_1F$ ;
- b) (4p) Calculați distanța de la mijlocul muchiei AB la planul (CFH).

(Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, clasa a VIII-a)



Soluție:

- a) **desen corect** ..... 1p  
 $O_2$  mijlocul segmentului BG  $\Rightarrow O_2$  este mijlocul segmentului CF  
 $O_1O_2$  linie mijlocie în triunghiul GDB  $\Rightarrow O_1O_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  ..... 1p  
 $O_1O_2$  mediană în  $\Delta CO_1F$ ,  $O_1O_2 = \frac{CF}{2} = O_2F = O_2C$   
 $\Delta CO_1F$  dreptunghic în  $O_1 \Rightarrow \sphericalangle CO_1F = 90^0$  ..... 1p
- b) ACFH tetraedru regulat, cu muchia de  $a\sqrt{2}$   
Fie  $M = pr_{(CFH)}^A \Rightarrow AM$  înălțimea tetraedrului ACFH,  $AM^2 = AC^2 - CM^2$ ,  $CM = R$   
(raza cercului circumscris) ..... 1p  
Notăm cu  $l$  muchia tetraedrului  $\Rightarrow AC = l = a\sqrt{2}$ ,  $CM = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ,  $AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$  ..... 1p  
Fie  $(CFH) \cap (ABC) = CN$ ,  $N \in AB$   
 $CN \parallel HF \parallel BD$ ,  $BDCN$  paralelogram,  $AN = 2AB = 2a$   
Dacă P este mijlocul segmentului AB  $\Rightarrow PA = PB = \frac{a}{2}$ ,  $NP = \frac{3a}{2}$  ..... 1p  
Fie  $PQ \perp (CHF)$ ,  $Q \in (CHF) \Rightarrow PQ \parallel AM$   
 $\frac{NP}{NA} = \frac{d(P,(CHF))}{d(A,(CHF))} \cdot \frac{3}{4} = \frac{d(P,(CHF))}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow d(P,(CHF)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  ..... 1p

**Notă:** Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.