

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 13.02.2026

CLASA a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiecte propuse de Chira Ana, Vicovu de Sus

1. (20p) Se consideră numărul real $x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{500}-\sqrt{499}}{\sqrt{499 \cdot 500}}$.

a) (5p) Calculați: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

b) (10p) Arătați că $0 < x < 1$.

c) (5p) Determinați partea întreagă a numărului $\sqrt{500} \cdot x$.

Soluție:

$$a) \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b) \quad x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{500}-\sqrt{499}}{\sqrt{499 \cdot 500}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{499 \cdot 500}} - \frac{\sqrt{499}}{\sqrt{499 \cdot 500}} = 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{499}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{500}} = 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{500}} = \frac{\sqrt{500}-1}{\sqrt{500}} < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$c) \quad \sqrt{500} \cdot x = \sqrt{500} \cdot \frac{\sqrt{500}-1}{\sqrt{500}} = \sqrt{500} - 1; 22 < \sqrt{500} < 23 \Rightarrow [\sqrt{500}] = 22 \Rightarrow [\sqrt{500} - 1] = 21$$

Barem:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} =$	2p
$= 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	3p
b) $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{499 \cdot 500}} - \frac{\sqrt{499}}{\sqrt{499 \cdot 500}} =$	3p
$= 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{499}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{500}} = 1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{500}}$	3p

$= \frac{\sqrt{500} - 1}{\sqrt{500}} < 1$	3p
$\Rightarrow 0 < x < 1$	1p
c) $\sqrt{500} \cdot x = \sqrt{500} \cdot \frac{\sqrt{500}-1}{\sqrt{500}} = \sqrt{500} - 1$	2p
$22 < \sqrt{500} < 23 \Rightarrow [\sqrt{500}] = 22$	2p
$[\sqrt{500} - 1] = 21$	1p

2. a) (10p) Determinați cifrele a și b pentru care numărul $\sqrt{2, (a) + 3, (b)}$ este număr rațional.

b) (15p) Arătați că numărul $N = \frac{(5+15)^2 + \sqrt{\frac{3}{2^2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} \cdot a^2 - \sqrt{160000}}}{(10+3) \cdot 2 - \sqrt{625}} + a$ nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

(G. M. nr. 2/1973)

Soluție:

$$a) \sqrt{2, (a) + 3, (b)} = \sqrt{\frac{2a-2}{9} + \frac{3b-3}{9}} = \sqrt{\frac{20+a-2}{9} + \frac{30+b-3}{9}} = \sqrt{\frac{45+a+b}{9}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45 + a + b - \text{pătrat perfect}; 0 < a + b \leq 18 \Rightarrow 45 < 45 + a + b \leq 63 \Rightarrow 45 + a + b = 49 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow a = 1 \text{ și } b = 3 \text{ sau } a = 2 \text{ și } b = 2 \text{ sau } a = 3 \text{ și } b = 1$$

$$d = 3 \cdot a + 1 \Rightarrow a + a + 2 + 3 \cdot a + 3 \cdot a + 1 = 107 \Rightarrow 8 \cdot a + 3 = 107 \Rightarrow 8 \cdot a = 104 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 13 \Rightarrow b = 15; c = 39; d = 40.$$

$$b) N = \frac{(5+15)^2 + \sqrt{\frac{3}{2^2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} \cdot a^2 - \sqrt{160000}}}{(10+3) \cdot 2 - \sqrt{625}} + a = \frac{20^2 + \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot a^2 - 400}}{26-25} + a = 400 + \sqrt{a^4} - 400 + a = \\ a^2 + a = a(a+1) \Rightarrow N \text{ nu poate fi pătrat perfect}$$

Barem:

a) $\sqrt{2, (a) + 3, (b)} = \sqrt{\frac{2a-2}{9} + \frac{3b-3}{9}} = \sqrt{\frac{20+a-2}{9} + \frac{30+b-3}{9}} =$	2p
$= \sqrt{\frac{45+a+b}{9}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 45 + a + b - \text{pătrat perfect}$	2p
$0 < a + b \leq 18 \Rightarrow 45 < 45 + a + b \leq 63 \Rightarrow 45 + a + b = 49$	2p
$\Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow a = 1 \text{ și } b = 3 \text{ sau } a = 2 \text{ și } b = 2 \text{ sau } a = 3 \text{ și } b = 1$	4p
$b = 15; c = 39; d = 40$	1p
b) $N = \frac{20^2 + \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot a^2 - 400}}{26-25} + a = 400 + \sqrt{a^4} - 400 + a =$	9p
$= a^2 + a = a(a+1)$	4p
$\Rightarrow N \text{ nu poate fi pătrat perfect}$	3p

3. a) (10p) Fie ABC un triunghi de arie 140 cm^2 . Pe latura BC se consideră punctele D și E astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{7}$ și $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{2}$. Calculați aria triunghiului ADE.

b) (15p) Fie trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AB = 2AD = 2CD$, M mijlocul lui AB, $AC \cap DM = \{N\}$, $MC \cap BD = \{P\}$. Arătați că $\mathcal{A}_{PMB} = \frac{1}{6} \mathcal{A}_{ABCD}$.

Soluție:

$$\text{a) } \frac{BD}{DC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{10} \Rightarrow BD = \frac{3BC}{10}; \frac{BE}{EC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{5}{7} \Rightarrow EC = \frac{2BC}{7}; DE = BC - BD - EC = \frac{29BC}{70}; \mathcal{A}_{ABC} = \frac{h \cdot BC}{2} = 140 \Rightarrow h \cdot BC = 280 \text{ cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{ADE} = \frac{h \cdot DE}{2} = \frac{29 \cdot h \cdot BC}{70 \cdot 2} \Rightarrow \mathcal{A}_{ADE} = 58 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } ADCM \text{ paralelogram} \Rightarrow \mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{CDM}; BCDM \text{ paralelogram} \Rightarrow \mathcal{A}_{BCM} = \mathcal{A}_{CDM} \Rightarrow \Rightarrow \mathcal{A}_{BCM} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot \frac{1}{3};$$

$$BCDM \text{ paralelogram} \Rightarrow CP = PM \Rightarrow \mathcal{A}_{BCP} = \mathcal{A}_{BPM} = \mathcal{A}_{BCM} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{PMB} = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$$

Barem:

a) $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{10} \Rightarrow BD = \frac{3BC}{10}$	2p
$\frac{BE}{EC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{5}{7} \Rightarrow EC = \frac{2BC}{7}$	2p
$DE = BC - BD - EC = \frac{29BC}{70};$	2p
$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{h \cdot BC}{2} = 140 \Rightarrow h \cdot BC = 280 \text{ cm}^2$	2p
$\mathcal{A}_{ADE} = \frac{h \cdot DE}{2} = \frac{29 \cdot h \cdot BC}{70 \cdot 2} \Rightarrow \mathcal{A}_{ADE} = 58 \text{ cm}^2$	2p
b) $ADCM \text{ paralelogram} \Rightarrow \mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{CDM}$ și $BCDM \text{ paralelogram} \Rightarrow \mathcal{A}_{BCM} = \mathcal{A}_{CDM}$	6p
$\Rightarrow \mathcal{A}_{BCM} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot \frac{1}{3}$	2p
$BCDM \text{ paralelogram} \Rightarrow CP = PM \Rightarrow \mathcal{A}_{BCP} = \mathcal{A}_{BPM} = \mathcal{A}_{BCM} \cdot \frac{1}{2}$	3p
$\Rightarrow \mathcal{A}_{PMB} = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$	4p

4. (20p) Fie un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC și punctul M mijlocul ei. Considerăm un punct D oarecare pe ipotenuza BC, iar punctul N este mijlocul segmentului AD și S simetricul lui M față de N. Dreapta SD intersectează catetele AC și AB în punctele P și Q. Să se arate că PS și SQ sunt congruente.

Soluție:

$$SAMD \text{ paralelogram} \Rightarrow \sphericalangle SQA \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBA \text{ și } \sphericalangle SAQ \equiv \sphericalangle SQA \Rightarrow \Delta QSA \text{ isoscel} \Rightarrow \Rightarrow QS \equiv AS \text{ (1)}$$

$$\sphericalangle ASP \equiv \sphericalangle CMA \text{ și } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle SAC \Rightarrow \text{triunghiul PSA isoscel} \Rightarrow SP \equiv SA \text{ (2)}$$

$$\text{din (1) și (2)} \Rightarrow SQ \equiv SP.$$

Barem:

$SAMD \text{ paralelogram} \Rightarrow \sphericalangle SQA \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBA \text{ și } \sphericalangle SAQ \equiv \sphericalangle SQA$	6p
$\Rightarrow \Delta QSA \text{ isoscel} \Rightarrow QS \equiv AS \text{ (1)}$	3p
$\sphericalangle ASP \equiv \sphericalangle CMA \text{ și } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle SAC$	6p
$\Rightarrow \text{triunghiul } PSA \text{ isoscel} \Rightarrow SP \equiv SA \text{ (2)}$	3p
$\text{din (1) și (2)} \Rightarrow SQ \equiv SP$	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.