

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 13.02.2026

CLASA a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiecte propuse de *Breabăn Mihaela Loredana*, Vicovu de Sus

1) a) (10p) Stabiliți dacă numărul $a = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 11} + \frac{8}{11 \cdot 19}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

b) (10p) Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x + 3| \leq 2,5\}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a &= \frac{5-1}{1 \cdot 5} + \frac{11-5}{5 \cdot 11} + \frac{19-11}{11 \cdot 19} \Leftrightarrow a = \frac{5}{1 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{11}{5 \cdot 11} - \frac{5}{5 \cdot 11} + \frac{19}{11 \cdot 19} - \frac{11}{11 \cdot 19} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{19} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{19} \Leftrightarrow a = \frac{18}{19} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad |x + 3| \leq 2,5 \Leftrightarrow -2,5 \leq x + 3 \leq 2,5 \Leftrightarrow -5,5 \leq x \leq -0,5$$

$$\text{Dar } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\} \Rightarrow A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$$

Barem.

a) $a = \frac{5-1}{1 \cdot 5} + \frac{11-5}{5 \cdot 11} + \frac{19-11}{11 \cdot 19} \Leftrightarrow a = \frac{5}{1 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{11}{5 \cdot 11} - \frac{5}{5 \cdot 11} + \frac{19}{11 \cdot 19} - \frac{11}{11 \cdot 19}$	5p
$a = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{19} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{19}$	3p
$a = \frac{18}{19} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$	2p
b) $ x + 3 \leq 2,5 \Leftrightarrow -2,5 \leq x + 3 \leq 2,5$	4p
$-5,5 \leq x \leq -0,5$	2p
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$	2p
$A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$	2p

2) (25p) Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2+3x+2}\right) : \frac{x-1}{x+1}$.

a) (5p) Determinați valorile lui x pentru care expresia are sens.

b) (10p) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) (10p) Calculați $S = [E(2)]^{-1} + [E(3)]^{-1} + [E(4)]^{-1} + \dots + [E(200)]^{-1}$.

Soluție.

a) Condițiile sunt $x + 2 \neq 0, x + 1 \neq 0, x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) \neq 0, x - 1 \neq 0$, de unde rezultă că $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$

$$\text{b)} \quad E(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2+3x+2}\right) : \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow E(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{(x+2)(x+1)}\right) : \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \left(\frac{(x+1)^2 - (x-2)(x+2) - 1}{(x+2)(x+1)} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4 - 1}{(x+2)(x-1)} \Leftrightarrow E(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Leftrightarrow E(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$\text{c) } S = \left(\frac{2}{2-1}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3-1}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{2}{200-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{199}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + \dots + 199) \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} \Leftrightarrow S = 9950$$

Barem.

a) Condițiile sunt $x + 2 \neq 0, x + 1 \neq 0, x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) \neq 0, x - 1 \neq 0$	3p
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$	2p
b) $E(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{(x+2)(x+1)} \right) : \frac{x-1}{x+1}$	2p
$E(x) = \left(\frac{(x+1)^2 - (x-2)(x+2) - 1}{(x+2)(x+1)} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1}$	3p
$E(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4 - 1}{(x+2)(x-1)}$	3p
$E(x) = \frac{2}{x-1}$	2p
c) $S = \left(\frac{2}{2-1}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3-1}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{2}{200-1}\right)^{-1}$	2p
$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{199}{2}$	4p
$S = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + \dots + 199)$	2p
$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} \Leftrightarrow S = 9950$	2p

3) În prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor $D'A, AB',$ respectiv $B'C$.

a) (10p) Demonstrați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

b) (10p) Demonstrați că ΔMNP este dreptunghic.

Soluție.

- a)** MN linie mijlocie în $\Delta AD'B' \Rightarrow MN \parallel D'B'$. Dar $D'B' \parallel DB \Rightarrow MN \parallel DB$
 NP linie mijlocie în $\Delta B'AC \Rightarrow NP \parallel AC$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel DB \\ NP \parallel AC \\ MN, NP \in (MNP) \\ MN \cap NP = \{N\} \\ AC \cap DB = \{O\} \end{array} \right| \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$$

b) $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$

$$MN \parallel DB, NP \parallel AC, AC \perp BD \Rightarrow \sphericalangle(MN, NP) = \sphericalangle(DB, AC) = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle MNP = 90^\circ \Rightarrow \triangle MNP \text{ este dreptunghic}$$

Barem.

a) Realizarea corectă a figurii	2p
MN linie mijlocie în $\triangle AD'B' \Rightarrow MN \parallel D'B'$. Dar $D'B' \parallel DB \Rightarrow MN \parallel DB$	2p
NP linie mijlocie în $\triangle B'AC \Rightarrow NP \parallel AC$	2p
$\left. \begin{array}{l} MN \parallel DB \\ NP \parallel AC \\ MN, NP \in (MNP) \\ MN \cap NP = \{N\} \\ AC \cap DB = \{O\} \end{array} \right \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$	4p
b) $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$	2p
$MN \parallel DB, NP \parallel AC, AC \perp BD \Rightarrow \sphericalangle(MN, NP) = \sphericalangle(DB, AC) = 90^\circ$	6p
$\sphericalangle MNP = 90^\circ \Rightarrow \triangle MNP$ este dreptunghic	2p

4) (25p) Se consideră tetraedrul $ABCD$, cu lungimile muchiilor AB, BC, CA direct proporționale cu numerele $\frac{1}{0,2}, \sqrt{144}, (2\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}$. Pe latura CD se consideră punctul E și se construiește F simetricul punctului E față de B .

a) (12p) Demonstrați că $AB \perp BC$.

b) (13p) Știind $AE \equiv AF$, demonstrați că $AB \perp (BCD)$.

Soluție.

a) $\frac{1}{0,2} = 5, \sqrt{144} = 12, (2\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = 13$

$$\frac{AB}{5} = \frac{BC}{12} = \frac{CA}{13} = k \Rightarrow AB = 5k, BC = 12k, CA = 13k$$

$$\text{Se observă că } CA^2 = BC^2 + AB^2 \xrightarrow{RTP} \sphericalangle ABC = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BC.$$

b) $AE \equiv AF \Rightarrow \triangle AFE$ este isoscel

$$FB = BE \Rightarrow B \text{ este mijlocul segmentului } FE \Rightarrow AB \text{ mediană în } \triangle AFE$$

$$\text{Dar } \triangle AFE \text{ este isoscel} \Rightarrow AB \text{ este înălțime} \Rightarrow AB \perp FE$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp FE \\ BC \cap FE = \{B\} \\ BC, FE \subset (BCD) \end{array} \right| \Rightarrow AB \perp (BCD)$$

Barem.

a) Realizarea corectă a figurii	2p
$\frac{1}{0,2} = 5, \sqrt{144} = 12, (2\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = 13$	3p

$\frac{AB}{5} = \frac{BC}{12} = \frac{CA}{13} = k \Rightarrow AB = 5k, BC = 12k, CA = 13k$	3p
Se observă că $CA^2 = BC^2 + AB^2 \xrightarrow{RTP} \sphericalangle ABC = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BC$	4p
b) $AE \equiv AF \Rightarrow \triangle AFE$ este isoscel	3p
$FB = BE \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $FE \Rightarrow AB$ mediană în $\triangle AFE$	3p
Dar $\triangle AFE$ este isoscel $\Rightarrow AB$ este înălțime $\Rightarrow AB \perp FE$	3p
$\left. \begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp FE \\ BC \cap FE = \{B\} \\ BC, FE \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (BCD)$	4p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.